



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교육학석사 학위논문

트래커로 분석한 충돌 입자의
맥스웰-볼츠만 속력 분포

2019 년 8 월

서울대학교 대학원

과학교육과 물리전공

이 지 훈

국 문 초 록

열적 평형 상태를 이루고 있는 이상 기체에 대한 이론적 접근 방법으로는 크게 보일-샤를의 법칙과 같이 입자들의 평균적인 상태 함수로 설명하는 거시적인 방법과 통계 역학과 같이 이상 기체 입자들의 운동을 설명하는 미시적인 방법으로 나뉜다. 이 중 미시적인 관점에서의 이론은 실제로 현상을 확인하고 직관적으로 이해하기 어렵기 때문에 모델링 및 그 모델을 분석하는 과정이 필요하다.

본 연구에서는 기존 이상 기체 모델링 실험을 분석하는데 있어서 트래커를 사용하였으며 이에 대한 적절성과 몇 가지 정량 분석을 보여준다. 우선 모델링을 위해 이상 기체 모델을 PHYWE사의 제품으로 구성하였다. 챔버 몸(Chamber body)은 $6.00\text{cm} \times 6.00\text{cm} \times 2.00\text{cm}$ 맞추어 이상 기체의 부피로, 반지름 1.00mm , 질량이 4.72mg 인 400개의 유리 구슬들은 이상 기체의 입자들로, 챔버 몸 밑 판의 진동 주파수는 온도로 모델링을 한다. 즉 일정한 진동수와 일정한 부피 안에서 유리 구슬들이 서로 충돌하며 다양한 속력을 갖는다.

이 모델을 분석하기 위해 구슬들 중 하나를 빨간 색으로 표적 입자로 정하고 트래커를 통해 이 입자의 시간에 따른 위치 정보를 얻는다. 하지만 트래커로 얻은 정보에는 정사영의 개념이 들어가 있기 때문에 속력 분포의 그래프를 얻었을 때 이는 3차원 공간의 맥스웰 볼츠만 분포가 아닌 한 축에 정사영 된 속력 분포를 따른다.

본론 실험으로 밑 판 주파수가 증가함에 따라 실제 온도가 증가 했을 때 형태로 속도 분포 그래프가 변화하는 것을 볼 수 있었다. 이는 밑 판 주파수가 이상 기체의 온도의 모델링 역할의 적절성을 보여준다. 또한 x 축 성분의 속력 분포와 y 축 성분 속력 분포는 경향성의 차이를 보였다. 이는 y 축 방향의 중력, 밑 판의 진동 에너지, 평형을 이룰 때까지의 시간, 총 입자의 양 및 높이에 등이 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

y 축 성분의 위치 분포를 통해 기압 차이에 따른 분포도 이 실험을 통

해 확인 할 수 있었다. 위치에 대한 분포를 그래프로 그리면 밀 판 진동에 의해 입자가 떠오르는 부분을 제외한 나머지 부분을 보면 e^{-kx} 의 분포를 따른다.

마지막으로 트래커로 얻은 정사영 데이터베이스를 3차원 복원해 맥스웰 볼츠만 분포와 일치하는지 확인하였다. 속도 공간에서의 입자 분포를 알기 위해서는 세 축에 정사영 정보를 알아야 하는데 z 축 성분 속력 분포는 중력과 밀 판 진동이 영향을 안 받는 x 축 성분 속력 분포와 같다고 가정하였다. MATLAB 알고리즘으로 처리하여 세 축의 정사영 정보를 가지고 속도 공간 분포를 복원한 뒤 구면 적분을 통해 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 따르는지 볼 수 있었으며 밀 판 주파수 값이 증가함에 따라 그래프가 오른쪽으로 이동 되는 현상도 확인할 수 있었다. 이를 통해 트래커를 통한 속력 분포 분석이 이상 기체의 모델링 분석 툴로 적절하다는 것을 알 수 있었다.

이번 연구에서는 트래커를 통해 x 축, y 축 성분 위치 속력 분포 분석 및 정사영 차원 변환을 통한 맥스웰 볼츠만 분포 확인을 하였다. 짧은 시간에 얻은 많은 데이터를 통해 정량 분석 및 통계학적인 접근이 가능하였다. 논문에서 분석한 것들 이외에도 다른 조작 변인에 대한 실험이나 새로운 이상 기체 모델 분석에 있어 트래커를 이용한 분석이 유용할 것이다.

주요어 : 맥스웰-볼츠만 속력 분포, 위치 분포, 차원 변환, 정사영, 트래커

학 번 : 2017 - 29737

목 차

국문 초록	i
목차	iii
표 목차	v
그림 목차	v
 제 1 장 서론	 1
제 1 절 연구 배경 및 목적	1
제 2 절 기존 연구 및 연구 방법	3
 제 2 장 본론	 7
제 1 절 배경 이론	7
1. 맥스웰-볼츠만 속력 분포	7
2. 한 축으로 정사영 된 속력 분포	8
제 2 절 장치 세팅 및 트래커 설정	11
1. 실험 장치 세팅	11
2. 카메라와 트래커(Tracker)의 환경 설정	13
제 3 절 맥스웰-볼츠만 데이터 변환	16
1. 표적 입자의 x 축 성분에 대한 속력 분포	16
2. 표적 입자의 y 축 성분에 대한 위치 및 속력 분포	22
3. 1차원-3차원 데이터 변환	30
제 4 절 실험 결과	35
 제 3 장 결론	 40

참고문헌	42
부 록	44
Abstract	47

표 목 차

[표 1] 밀 판 진동 주파수에 따른 표적 입자의 x 축 성분 에 대한 속력 분포 피팅 함수 값	18
[표 2] 밀 판 진동 주파수와 입자 수 에 대한 속력 분포 피팅 함수 값	21
[표 3] 밀 판 진동 주파수에 따른 표적 입자의 y 축 성분 에 대한 속력 분포 피팅 함수 값	26
[표 4] 밀 판 진동 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 피팅 함수 값	36

그 립 목 차

[그림 1] 모델링 연구의 Diagram	2
[그림 2] PHYWE사의 맥스웰-볼츠만 속력 분포 확인 장치 ...	4
[그림 3] 챔버 몸 옆 벽면의 구멍 구조	4
[그림 4] 기존 실험의 유리 구슬 개수를 세어 확인한 분포 결과	5
[그림 5] 3차원 공간에서 한 축으로 정사영 되는 입자의 운동	6
[그림 6] 3차원 맥스웰-볼츠만 분포의 형태	8
[그림 7] 한 축으로 정사영 된 속력 분포의 형태	9
[그림 8] Kinetic gas theory apparatus	12
[그림 9] 트래커를 이용한 입자의 속력 분포 확인 실험 환경 ·	12

[그림 10] 트래커 환경에 맞추기 위한 챔버 몸(Chamber Body)	14
[그림 11] 표적 구슬과 조명	14
[그림 12] 트래커 스텝 환경 설정 화면	15
[그림 13] 밀 판 진동 30Hz일 때의 표적 입자의 x 축 성분 대한 속력 분포	16
[그림 14] 밀 판 진동에 따른 표적 입자의 x 축 성분 대한 속력 분포 및 피팅 함수	18
[그림 15] 표적 입자의 y 축 성분; 밀 판 진동수에 대한 피팅 함수 K 값 그래프	19
[그림 16] 데이터 수 N 값의 따른 속력 분포 및 피팅 함수	20
[그림 17] 표적 입자의 y 축 성분 대한 위치 분포	22
[그림 18] 표적 입자의 y 축 성분 대한 위치 분포; 구간에 대한 해석	23
[그림 19] y 축 속력 분포의 사용될 입자들의 위치 분포 및 피팅 함수	24
[그림 20] 밀 판 진동 30Hz일 때의 표적 입자의 y 축 성분 대한 속력 분포	25
[그림 21] 밀 판 진동에 따른 표적 입자의 y 축 성분 대한 속력 분포 및 피팅 함수	26
[그림 22] 표적 입자의 y 축 성분; 밀 판 진동수에 대한 피팅 함수 K 값과의 비교	27
[그림 23] 주파수에 따른 x 축, y 축 성분의 속력 분포 비교	28
[그림 24] 한 축에 정사영 된 속력 분포를 맥스웰-볼츠만 속력 분포로 변환 시키는 알고리즘	33
[그림 25] 정사영 정보에서 원래 공간 정보를 얻어내는 방식	33
[그림 26] 각 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포	

및 피팅 함수	34
[그림 27] 한 축에 정사영 된 속력 분포의 3차원 분포로의 변환	34
[그림 28] 각 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 및 피팅 함수	35
[그림 29] 밀 판의 주파수 30Hz일 때 발견 가능성이 가장 높은 속력 V_{fm}	37
[그림 30] 밀 판의 주파수에 대한 가능성이 가장 높은 속력 V_{fm} 분포	37
[그림 31] 밀 판의 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 ...	38
[그림 32] 밀 판의 주파수가 30Hz, 60Hz일 때 맥스웰-볼츠만 속력 분포 비교	39

제 1 장 서론

제 1 절 연구 배경 및 목적

물리 현상을 모델링하고 분석하는 것은 교육적으로 큰 의의를 지닌다. 모델링을 통해서 이해하기 어렵거나 실제로 확인할 수 없는 부분을 직관적으로 받아들일 수 있으며 그에 대한 사고력을 증진 시킬 수 있기 때문이다.(하지희 2009) 또한 국내외에서 이루어진 많은 모델링 연구들을 보면 모델링과 만들어진 모델을 어떻게 분석하고 이해하는지 등의 과정들이 과학 교육 및 학습에서 빠질 수 없는 중요한 한 부분이라는 것을 알 수 있다.(조혜숙 2017)(Ornek 2008)

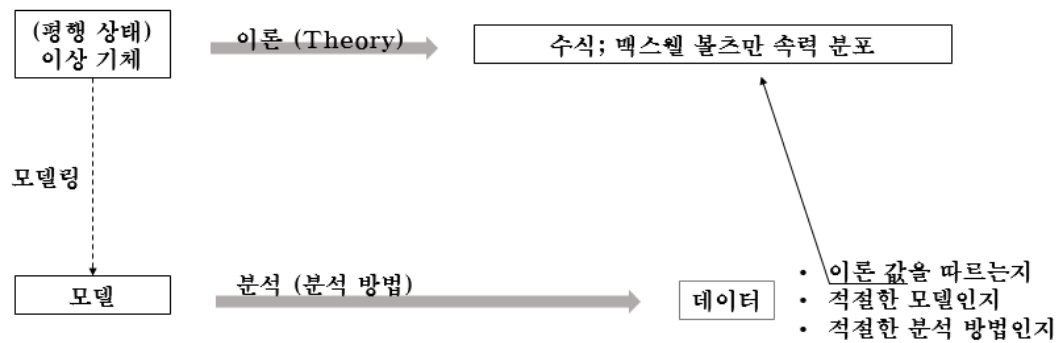
열역학 분야에서 모델링은 과학 교육이나 연구에 있어서 특히 중요하다. 많은 수의 입자들이라든지 엔트로피와 같은 개념들처럼 실제 대상을 모두 분석하거나 확인하기 어려운 경우가 많기 때문이다.(Abigail R 2013)

이 연구는 모델링 연구라고 볼 수 있다. 그림 1을 보면 연구의 전체적 흐름과 주안점을 알 수 있다. 먼저 이상 기체 상태 분석에 있어 기본적인 수식은 중고등학교 때부터 다룬다. 이때는 거시적인 방법으로 보일-샤를의 법칙을 배우는데 이는 각 입자들 상태의 평균값을 이해하는 방식이며 수식이 간단하고 실험을 하는데 있어서도 상대적으로 직관적이다. 이에 반해 본 연구에서 다루는 부분은 이상 기체를 미시적으로 분석하는 방법에 있다. 기체가 평형 상태를 이루고 있더라도 기체의 각 입자들은 다른 입자들과 충돌을 하며 에너지와 다양한 속력을 갖는데 이를 통계 역학으로 접근하게 되면 맥스웰-볼츠만 속력 분포라는 식을 얻을 수 있다.(Robert 2014)

더불어 실제 이상 기체는 눈으로 확인할 수 없기에 모델링이 필요하고 만들어진 모델을 분석하는 과정이 필요하다. 이때 분석 방법은 실험 환

경이나 목적에 따라서 적절히 선택해야 한다. 이 연구에서는 이상 기체의 모델을 트래커라는 프로그램을 이용해 분석하였다. 트래커는 표적 위치와 시간 정보를 가지고 여러 가지 정량 분석을 할 수 있는 장점이 있다.

마지막으로 모델을 이용해 데이터를 얻게 되면 이를 통해 맥스웰 볼츠만 속력 분포의 수식을 따르는지 확인하는 과정이 필요하다. 조작 변인을 이용해 기존 예상한 모델링 결과 데이터가 나오는지 확인함으로써 모델의 적절성을 판단 할 수 있다. 또한 모델을 분석하는데 있어서 오류나 실험 목적에 맞는 분석 방법인지도 확인을 해야 한다.



[그림 1] 모델링 연구의 Diagram

제 2 절 기존 연구 및 연구 방법

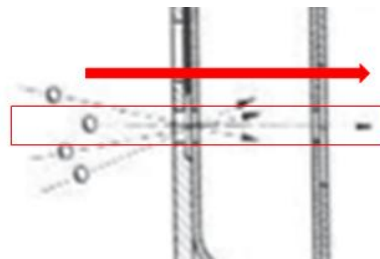
아래 그림 2는 서울대 물리교육과 학부 3학년 과정 물리교육실험에서 맥스웰-볼츠만 속력 분포 확인 실험이다. 본 연구에서는 이 실험에서 사용한 이상 기체의 모델을 사용하였다. PHYWE사의 기기로 챔버 몸(Chamber body, 그림7 (a))은 가로 세로 길이가 각각 6.00cm, 2.00cm으로 고정되어 있고 높이는 수동으로 조절된다. 이 조절된 부피를 실제 이상기체의 부피로 가정한다. 또한 이상 기체의 온도는 밑 판(Bottom plate)의 상하 진동 주파수, 기체 입자들은 400개 정도의 유리 구슬들로 이상 기체를 대체한다. 실험에서는 밑 판은 설정한 진동수에 따라 챔버 몸 부피 안에서 위아래로 움직이는데 이 때문에 챔버 몸 안의 유리 구슬들이 마구 충돌하며 여러 속도를 갖게 된다.

기존 실험에서의 이 모델을 분석하는 방법은 실제 유리 구슬의 개수를 세는 것에 있다. 우선 챔버 몸 옆면을 보면 벽면에 구멍이 있는데 그림 3과 같이 두 개가 뚫려 있다. 이 구멍들을 통과해 나온 구슬들은 챔버 몸 안의 여러 속력(맥스웰 볼츠만 속력 분포)을 갖는 입자들 중 x 축으로 움직이는 구슬들만 추출한 것이라고 볼 수 있다. 또한 구멍을 빠져 나온 유리 구슬이 날아간 거리는 x 축 방향의 초기 속력과 비례하다. 즉 느린 속력의 구슬은 구멍과 가까이, 빠른 속력의 구슬은 구멍에서부터 멀리 떨어진다. 일정 거리 dx 구간 마다 쌓인 입자의 개수를 확인하여 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 따르는지 확인하는 것이다. 실제로 유리 구슬의 개수를 세지 않아도 구슬이 쌓인 모습을 보아도 맥스웰-볼츠만 분포의 모습을 볼 수 있어 직관적으로 이해할 수 있는 장점이 있다. 더불어 이상 기체에서 온도에 해당하는 밑 판의 진동수를 늘리면서 속력 분포가 오른쪽으로 이동함을 확인 할 수 있다. 이 모델링 실험에서는 구멍을 빠져나온 구슬들 약 ~ 100 개 정도를 가지고 분석하며 분석 결과 그림4에서 빨간 피팅은 밑 판 진동이 40Hz인 경우, 파란 피팅은 60Hz인 경우로 결과 그래프를 확인할 수 있다.

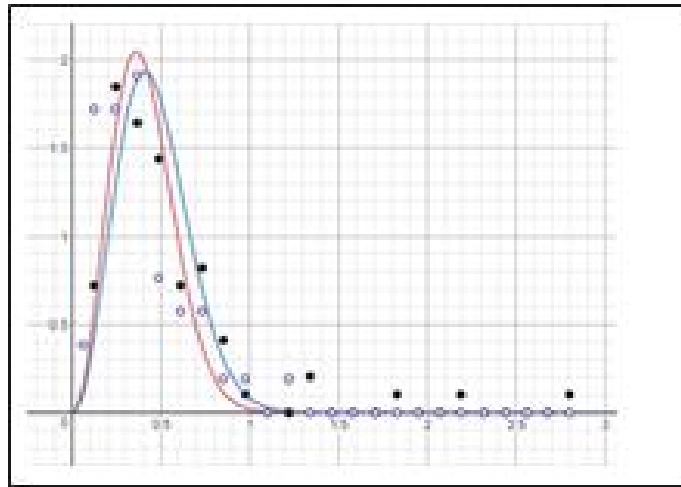


[그림 2] PHYWE사의 맥스웰-볼츠만 속력 분포 확인 장치

기존 모델링 분석 실험에서는 직관적이라는 장점이 있는 반면 본 연구에서는 모델링을 트래커로 분석한 방법은 정량 분석이 가능한 장점이 있다. 한 입자를 트래커로 추적하여 한 축에 정사영 된 속력 분포 및 중력이라는 변인의 유무에 따른 결과를 확인해 보고 이를 맥스웰-볼츠만 속력 분포로 전환하여 모델의 분석 방법이 적절한지 확인해 보는데 의의를 둔다.



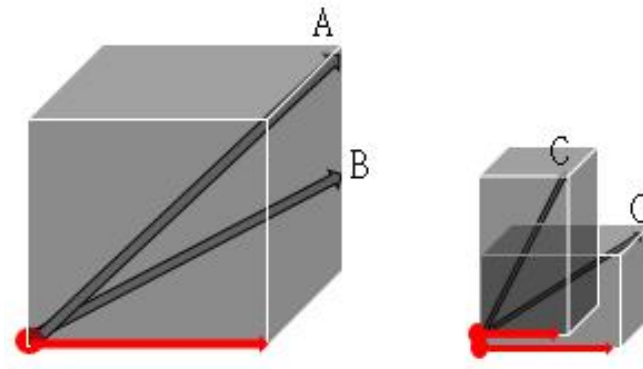
[그림 3] 챔버 몸 옆 벽면의 구멍 구조



[그림 4] 기존 실험의 유리 구슬 개수를 세어 확인한 분포 결과

트래커를 이용한 분석의 포인트는 표적 입자를 잡는 것이다. 그림 6의 트래커 환경을 꾸며서 그 입자의 데이터를 얻으면 x 축이나 y 축에 정사영된 속력 분포를 얻을 수 있다. 배경 이론에서도 설명을 하겠지만 정사영된 속력 분포는 기존 맥스웰-볼츠만 분포와는 다른 분포를 가지고 있다. 그림 5처럼 3차원 공간 안에 다른 속력을 가지는 입자의 운동 A, B라고 트래커의 한 축으로 보았을 때는 같은 속력으로 인식을 하고, 같은 속력 C 운동의 입자라도 트래커 분석에서는 다른 속력으로 인식할 수 있기 때문이다.

기존 실험에서는 튀어 나오는 구슬의 수가 맥스웰-볼츠만 분포를 따르는지 확인하는 것처럼 이 실험에서는 트래킹 이 후 얻은 데이터로 실험 데이터가 한 축에 정사영된 속력 분포를 따르는지 확인을 한다. x 축에 정사영된 속력 분포, y 축에 정사영된 속력 분포를 확인해 보고 이 정사영된 속력 분포를 맥스웰-볼츠만 속력분포로 변환 시켜 확인을 해보았다. 더불어 y 축은 중력에 영향을 미치기 때문에 x 축의 분포와 어떤 차이점을 갖는지도 확인해 볼 수 있었다.



[그림 5] 3차원 공간에서 한 축으로 정사영 되는 입자의 운동

제 2 장 본론

제 1 절 배경 이론

1. 맥스웰-볼츠만 속력 분포

이 절에서는 맥스웰-볼츠만 속력 분포의 유도 과정과 직교 좌표계 안에서 운동하는 입자를 한 축에 정사영시켰을 때의 속력 분포의 유도 과정을 설명하려고 한다. 한 축에 정사영된 속력 분포는 트레이커로 얻은 속력 분포를 분석할 때 사용된다.

다른 계들과 평형 상태에 있는 어떤 계가 미시 상태 α 에 있는 확률은 $e^{-E_{N,\alpha}/k_B T}$ 에 비례한다. 여기서 N 은 총 입자 개수, m 은 입자의 질량, k_B 는 볼츠만 상수, T 는 온도를 의미한다. $e^{-E/k_B T}$ 를 볼츠만 인자라고 하는데 E 항에 운동 에너지 $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ 값을 넣고 전체 적분 값을 1로 하는 상수와 입자 계수 N 을 이용해 다음과 같은 볼츠만 속도 분포를 유도할 수 있다.

$$n_{vel}(\vec{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} |\vec{v}|^2}.$$

$n_{vel}(\vec{v})$ 은 속도 \vec{v} 를 갖는 입자들의 개수이다. (Roberts J 2014)

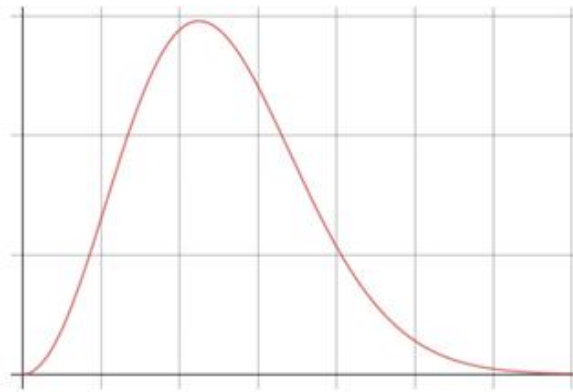
맥스웰 속력 분포는 볼츠만 속도 분포를 속도 공간에서 모든 방향으로 적분하여 얻어진다. 이를 식으로 나타내면

$$n(v)dv = \int n_{vel}(\vec{v})d^3\vec{v}$$

이고 속도 공간 $\vec{v} = (v, \theta, \phi)$ 에서 θ 와 ϕ 에 대해 모든 방향으로 적분을 하면, $n(v)dv = \int 4\pi f(v)v^2 dv$ 가 되어 속력 v 를 남기고 정리하면 맥스웰 속력 분포

$$n(v)dv = 4\pi N v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T}v^2} dv$$

를 얻을 수 있고 분포의 모양은 그림6의 모양을 따른다. 이는 평형 상태에 있는 이상 기체 안에 기체 입자들을 어느 순간 포착하였을 때 각 입자의 순간 속력 분포라 할 수 있다. 이와 관련하여 본 연구에서는 모든 입자의 속력을 측정한 것이 아니라 한 입자를 표적으로 삼아 일정 시간 간격으로 충돌 후 변하는 속력을 재어 그 분포를 나타내었다. 400개의 유리 구슬이 충돌하는 모델에서 한 입자의 변화 속력을 2000번 재어 분포를 나타내었는데 이는 통계학적으로 400개의 분포를 5번 분석하여 합친 것과 같다.



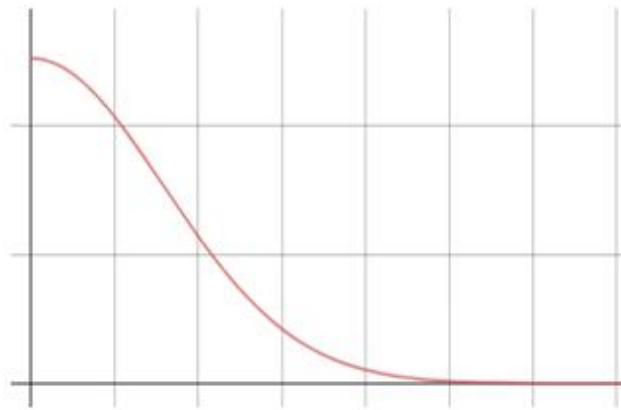
[그림 6] 3차원 맥스웰-볼츠만 분포의 형태

2. 한 축으로 정사영 된 속력 분포

이 연구에서는 트래킹으로 얻은 한 축의 속력에 대한 입자의 개수는 각 속도를 특정 한 축으로 정사영 시킨 속력 값으로 해석할 수 있으며, 이 경우 맥스웰 속력 분포는 직교 좌표계에서 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 나머지 두 축 방향 성분을 모두 적분하여 얻을 수 있다. 수식으로는,

$$n(v_x)dv_x = \int_{(v_y)} \int_{(v_z)} n_{vel}(\vec{v})d^3\vec{v} = N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_B T}v_x^2} dv_x$$

이며 이는 한 축(x 축) 방향 성분 대한 속력 분포가 임을 알 수 있고 그림 7의 모양을 따른다(Richard 2006). 이 실험에서는 3차원 공간에서 움직이는 입자들을 영상으로 찍고 2차원 공간에서 위치, 시간에 대한 정보를 분석 한 것이므로 가로 축(x 축)과 높이 축(y 축) 성분의 속력 분포가 위 식의 분포를 따르는 것을 볼 수 있다.



[그림 7] 한 축으로 정사영 된 속력 분포의 형태

연구 본론 마지막으로 이 두 속력 분포의 관계를 확인하기 위해 정사영된 데이터를 3차원으로 복구하는 작업을 하였다. 이를 위해서는 세 축으로 정사영된 정보를 다 알아야 하는데 실험으로 알 수 없는 z 축의 정보는 중력과 밑 판의 충격량이 적용되지 않는 x 축의 분포 정보와 같다고 가정하여 정사영 정보를 속도 공간으로 변환한다.

y 축 속력 분포는 중력과 밑 판의 진동에 의해 수식이 좀 복잡해진다. 볼츠만 인자의 E 항에

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgy \quad (p \text{는 운동량, } g \text{는 중력 가속도})$$

를 대입함으로써 수식을 전개할 수 볼 수 있다. 이를 볼츠만 분포를 통한 맥스웰 속력 분포로 나타내면 다음과 같다.

$$n(v_y)dv_y = \int_{(v_x)} \int_{(v_z)} n_{vel}(\vec{v})d^3\vec{v} \cdot \int \left(\frac{mg}{k_B T}\right) e^{-\frac{mg}{k_B T}y} dy = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_B T}v_y^2} dv_y$$

이는 높이에 대해서 모든 입자들을 적분하면 y 축 방향 성분의 속력 분포가 된다는 것을 알 수 있다. 그러나 본 연구 결과로 x 축 분포와 y 축 분포를 비교했을 때 밑 판 진동수의 주파수가 높아질수록 그 차이가 더 심해짐을 볼 수 있었다.

제 2 절 장치 세팅 및 트래커 설정

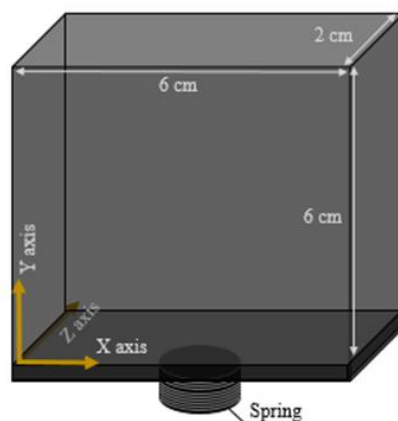
1. 실험 장치 세팅

이상 기체의 상태를 모델링하기 위해서 그림8의 (a)인 Kinetic gas theory apparatus(PHYWE Co.) 장치 챔버 몸(Chamber Body)을 사용하였다. 이 챔버의 공간 크기를 조절하여 이상 기체의 부피라고 가정하였으며 윗면의 높이를 조절하여 그림8의 (b)와 같이 x , y , z 방향으로 $6.00\text{cm} \times 2.00\text{cm} \times 2.00\text{cm}$ 의 사방이 막힌 일정한 부피로 고정시켰다.

이 이상 기체 모델을 가지고 그림 9과 같이 전체 실험 환경을 구성하였다. 이상 기체 안의 입자는 반지름이 0.80mm 이고 무게가 4.70mg 인 유리 구슬로 모델링을 하였으며 이 구슬 400개를 챔버 몸 안에 넣는다. 이때 챔버 몸 안에 밑 판(Bottom plate)은 y 방향으로 진동하는데 이 진동수를 기체의 온도라고 가정한다. 밑 판의 진폭 거리는 0.30cm 로 총 0.60cm 의 폭에서 왕복 운동을 하는데 진동수가 올라갈수록 챔버 몸 안의 유리 구슬들은 더 많은 충돌과 함께 빠른 속력을 갖는다. 이 밑 판의 진동 주파수는 스트로보스코프를 사용하여 조절하였고 기기 특성 상 30Hz 미만이면 밑 판 위의 구슬들이 튀어 오르지 않는다는 점과 60Hz 초과이면 기기 자체가 진동하여 움직이는 현상 때문에 $30\text{Hz} \sim 60\text{Hz}$ 범위 내에서 진동수를 사용하였다. 이렇게 세팅이 완료 되면 녹색 광원을 사용하여 챔버를 비추고 카메라로 입자의 충돌하는 모습을 동영상 촬영을 한다. 이 동영상을 트래커 분석 프로그램에 적용하여 데이터를 수집하는 것이다.

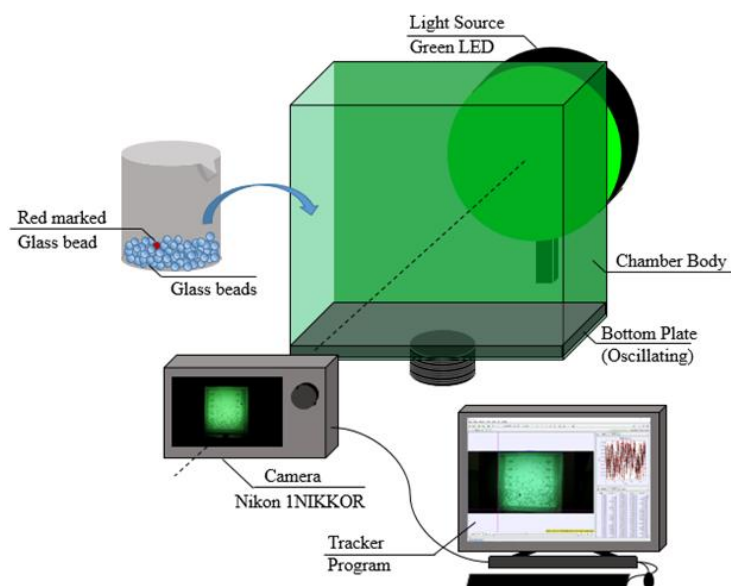


(a)



(b)

[그림 8] Kinetic gas theory apparatus. (a) PHYWE 사의 실험 장치 (b) $6.0\text{ cm} \times 2.0\text{ cm} \times 2.0\text{ cm}$ 로 조절한 챔버 몸(Chamber Body)트래커를 이용한 입자의 속도 분포 확인 실험 환경

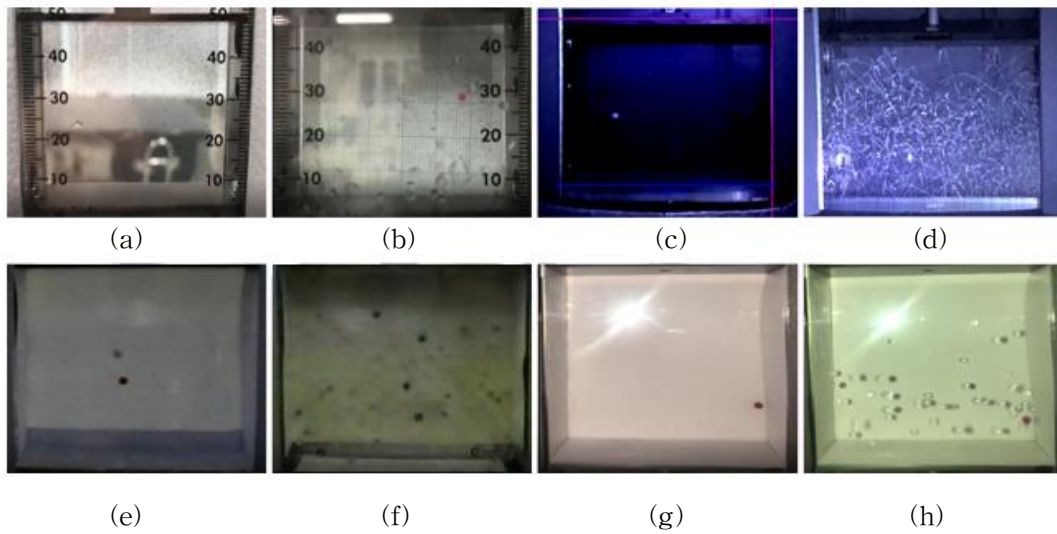


[그림 9] 트래커를 이용한 입자의 속도 분포 확인 실험 환경

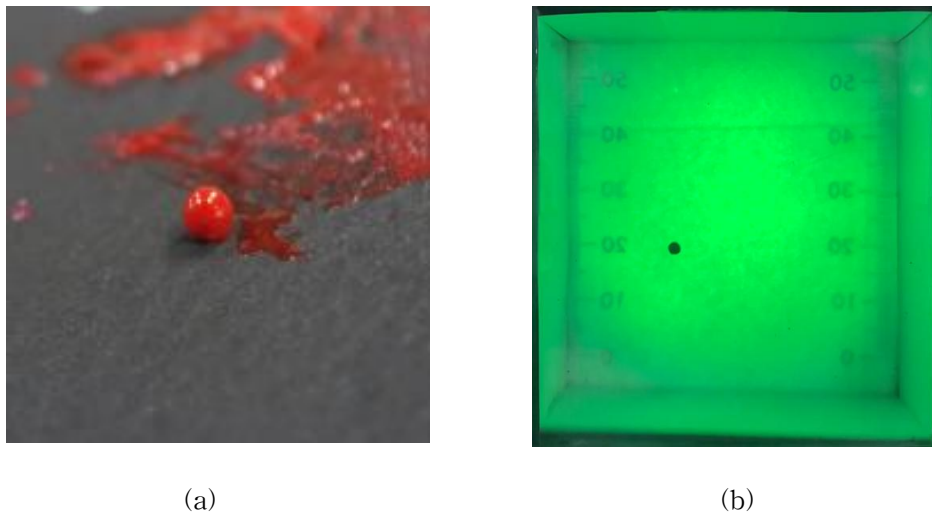
2. 카메라와 트래커의 환경 설정

카메라는 Nikon의 J5 모델을 사용하였다. 트래커를 이용하기 위해서는 동영상 모드를 사용해야 하는데 슬로우 모션 기능을 사용하게 되면 해상도가 조금 낮더라도 마킹 된 구슬의 모든 궤적 데이터를 얻어 분석할 수 있다. 하지만 입자의 x 축 방향으로 일정한 움직이는 구간이나 y 축 방향으로 오직 중력가속도의 영향만 받는 구간에서의 속력 데이터는, 충돌 후 바뀌는 속력들이 필요한 이 실험에선 불필요한 값이 된다. 그리하여 해상도는 1280×720 , 프레임 속도는 60fps로 카메라를 설정하고 그림 12 처럼 트래커에서 세 프레임(프레임스텝 크기 = 3)마다 위치를 추적하여 1/20초에 한 번씩 이동되는 마킹 된 구슬의 변위를 추적하였다.

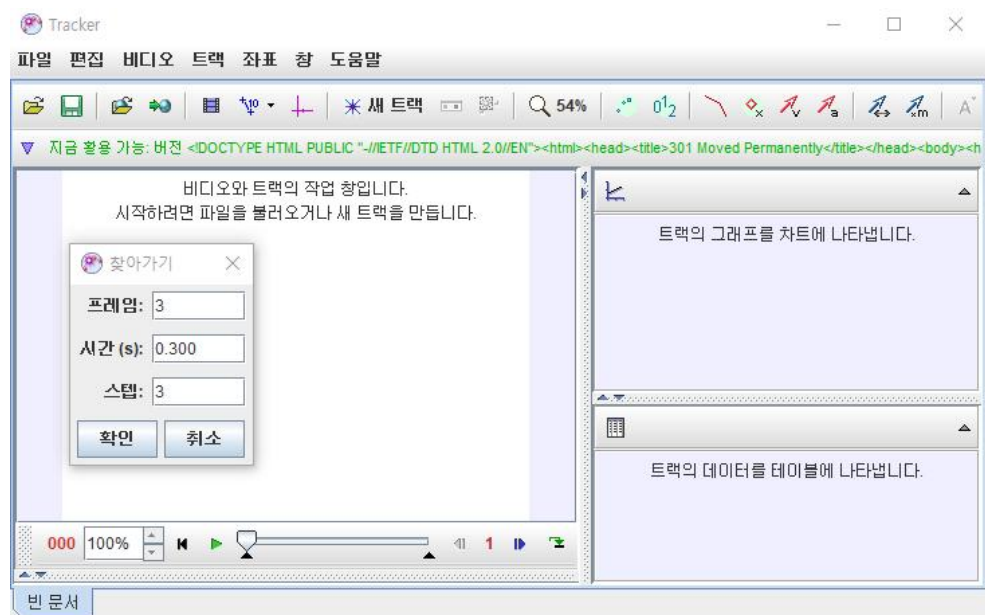
트래커는 <https://physlets.org/tracker/> 에서 오픈 자료로 제공하는 tracker 5.0.7 버전 프로그램을 사용했다. 그림 10은 마킹한 색과 배경, 조명에 따라 여러 환경에 따라 트래킹을 해 봄으로써 최적의 환경을 위해 실험 한 사진들이다. (a)는 챔버 몸을 그대로 쓴 것으로 뒷면의 배경이 비취서 트래킹으로 사용하기에는 적절치 않았다. (b) 경우는 뒷면을 종이로 막았지만 앞면의 유리로 인해 반사 이미지가 트래킹을 방해하였다. (c)와 (d)는 반사를 막기 위해 암실과 백색 조명 광을 사용한 것인데 보이는 것과 같이 유리 구슬들이 모두 빛을 반사해서 마킹 된 구슬 찾기가 쉽지 않았다. (e)에서 (f)는 실내등과 백색 조명 광을 이용해 꾸민 것인데 그림자의 문제가 트래킹을 방해하였다. 그리하여 그림 11과 같이 (a)빨간 에나멜로 구슬을 마킹하고 (b) 빨강 색의 보색인 녹색 조명을 뒷면에서 비춤으로써 대비는 높이고 반사에 대한 역효과를 줄여 트래커 프로그램에서 잘 인식이 되도록 하였다. 또한 유리 구슬이 투명한 점을 이용해 표적 구슬이 3차원 공간에서 유리 구슬 뒤에 위치하더라도 어두운 그림자를 통해 위치를 파악할 수 있다.



[그림 10] 트랙커 환경에 맞추기 위한 챔버 몸(Chamber Body) (a) 챔버 몸 (b) 모눈종이를 부착한 모습 (c), (d) 어두운 환경에서 백색광을 비춰준 모습. (e), (f) 약한 실내조명 환경에서 짙은 모습 (g), (h) 밝은 환경에서 백색광을 비춰준 모습



[그림 11] 표적 구슬과 조명 (a) 유리 구슬에 빨간 에나멜을 입힌 모습 (b) 종이로 둘러싼 챔버 몸(Chamber Body) 뒤로 녹색 광원을 비춘 모습.

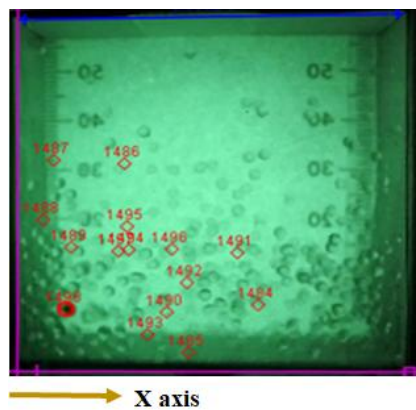


[그림 12] 트래커 스텝 환경 설정 화면

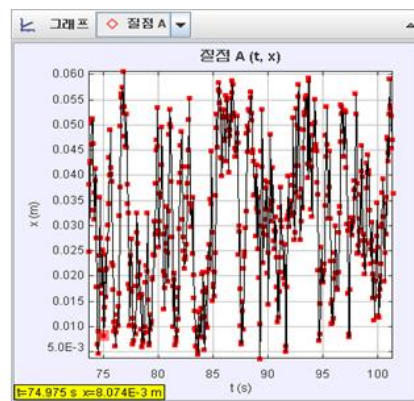
제 3 절 맥스웰-볼츠만 데이터 변환

1. 표적 입자의 x 축 성분에 대한 속력 분포

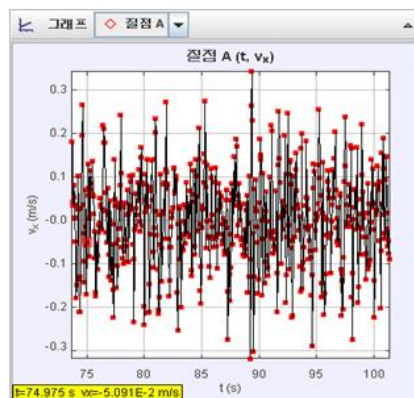
앞 서 세팅한 카메라로 2D 동영상을 얻고 영상 속의 표적 입자를 트랙커로 추적하였다. 그림 13은 밀 판 진동이 30Hz일 때 표적 입자의 x 성분의 속력 분포를 얻기 위한 단계이다.



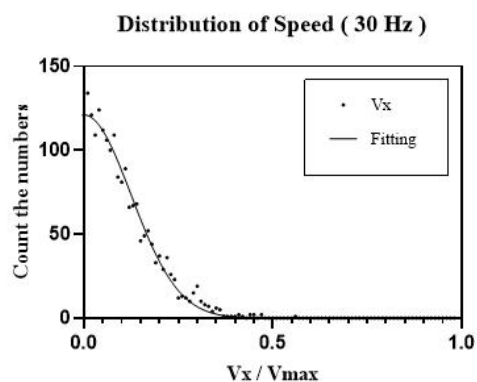
(a)



(b)



(c)



(d)

[그림 13] 밀 판 진동 30Hz일 때의 표적 입자의 x 축 성분에 대한 속력 분포. (a) x - y 축 공간에서의 마킹 된 구슬의 추적 (b) 시간에 따른 변위 그래프 (c) 시간에 따른 속력 그래프 (d) 속력 대한 입자의 개수 그래프

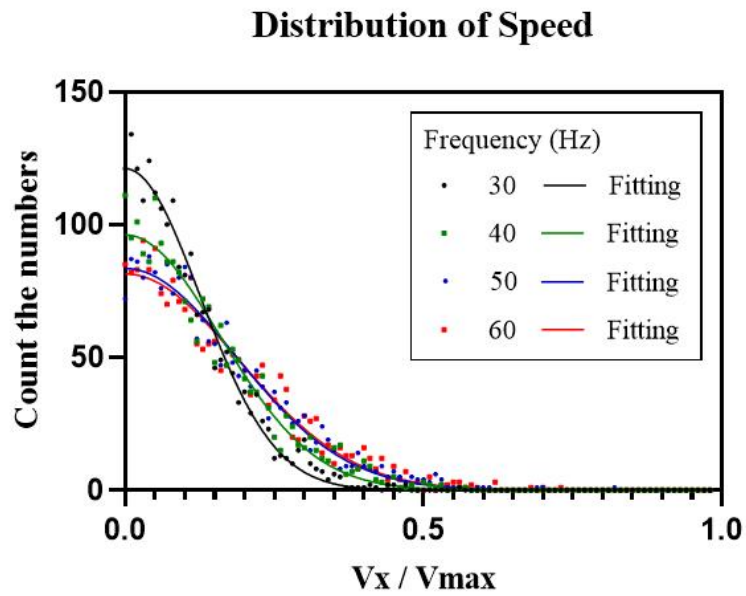
그림 13의 (a)는 실제 트래킹에서 추적한 영상을 보여준다. 총 2000개

의 데이터를 얻었으며 그 중 1400번 째 후반의 분포를 나타내고 있다. 트래커로 입자를 추적할 때 얻을 수 있는 제일 기본적인 데이터로는 시간에 따른 위치 정보이다. 2차원 화면상의 위치 정보이기 때문에 (x, y) 의 형태로 값이 저장 되는데 (b) 그래프는 1/20초의 시간마다 입자의 x 축 위치를 나타내고 있다. (c) 그래프는 시간에 따른 x 성분의 속력을 나타낸다. 앞서 언급했듯이 각 프레임 사이의 간격은 표적 입자가 충분히 충돌하는 시간 이상으로 잡았기 때문에 (c)에서 얻은 각 속력을 속력 분포를 만들 때 그대로 사용할 수 있다. (d)는 (c)에서 얻은 속력들을 엑셀을 사용해 분포로 나타낸 그래프이다. 이 때 x 축은 각 속력들을 최댓값 속력 0.60 m/s으로 나누어 0에서 1값으로 정규화 시켰다. 미소 구간 dx 값은 0.01로 백 개의 x 축 구간을 나누었고 각 구간에 해당되는 속력의 개수를 y 값으로 분포를 그려보았다. 즉, 그래프의 y 값을 모두 더하면 분석한 입자의 수, 총 2000개임을 알 수 있다.

배경 이론에서 언급한 것처럼 이 그래프는 모든 속도 벡터들을 x 축에 정사영 시킨 속력 분포 $n(v_x) = N(\frac{m}{2\pi k_B T})^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_x^2}$ 식을 따르는지 확인

을 해야 한다. 그림 13의 (d) 30Hz인 경우 데이터를 $n(x) = A e^{-Kx^2}$ 식으로 피팅 하면 $A = 120.0$, $K = 31.86$ 이며 R-squared 값은 0.9890을 따른다.

같은 방식으로 30Hz에서 60Hz까지 x 축으로 정사영 된 분포를 나타내면 그림 14의 그래프 형태로 볼 수 있으며 피팅 된 값들은 표1에 나타내었다.

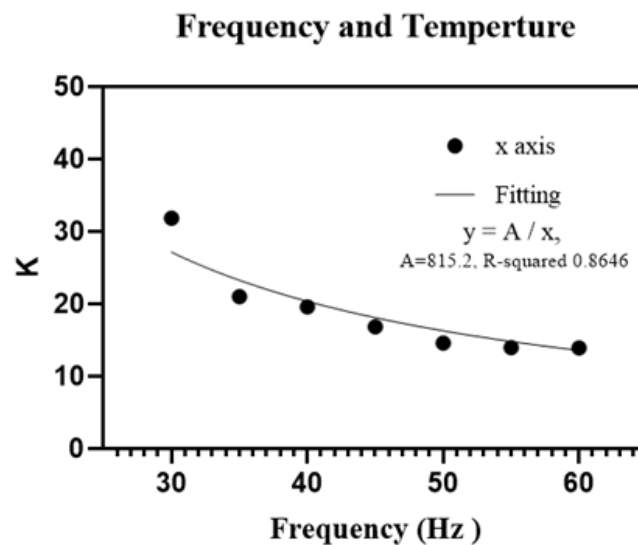


[그림 14] 밀 판 진동에 따른 표적 입자의 x 축 성분에 대한 속도 분포 및 피팅 함수

$n(x) = Ae^{-Kx^2}$ Fitting			
Frequency (Hz)	A	K	R-squared
30	121.1	31.86	0.9890
35	98.84	21.01	0.9756
40	94.13	19.86	0.9786
45	89.08	16.84	0.9727
50	83.50	14.61	0.9828
55	80.12	13.99	0.9370
60	81.48	13.93	0.9755

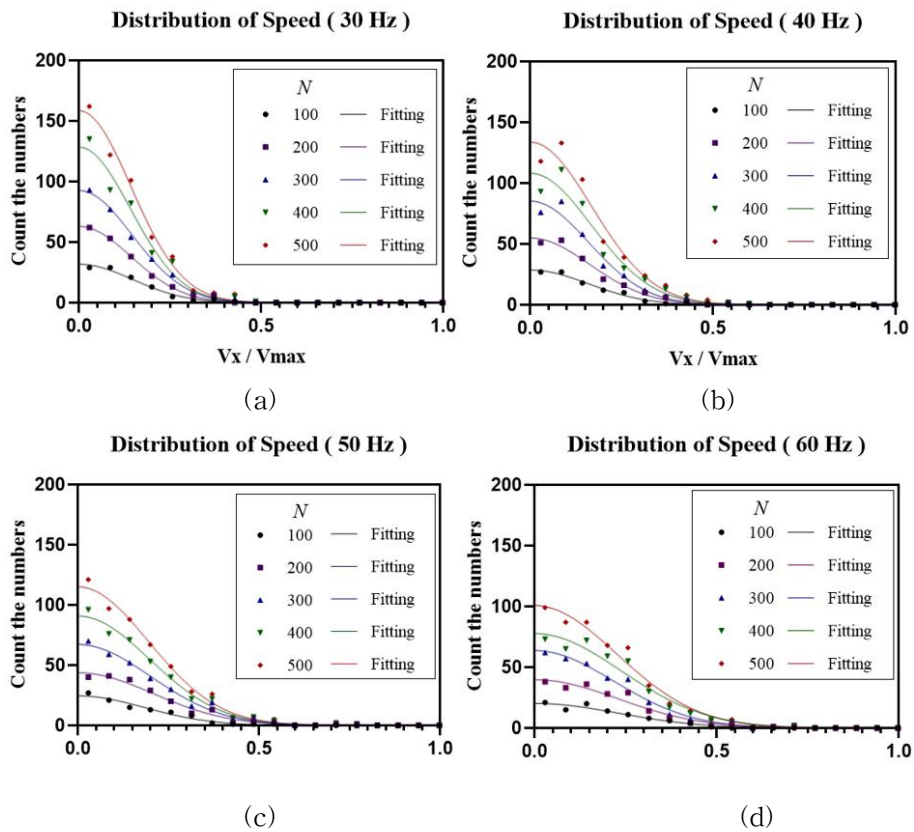
[표 1] 밀 판 진동 주파수에 따른 표적 입자의 x 축 성분에 대한 속도 분포 피팅 함수 값

K 값에 해당하는 수식은 $\frac{m}{2k_B T}$ 에 해당한다. 여기서 볼츠만 상수와 질량은 실제 값을 쓰진 않지만 일정하기에 통제 변인으로 볼 수 있으며 앞서 이상 기체의 온도를 밀 판의 진동 주파수로 모델링 가정한 부분을 조작 변인으로 볼 수 있다. 즉, K 값이 온도와 역수 관계를 갖는 것처럼 밀 판 진동의 주파수와도 역수 관계임을 보여야 적절한 모델링이 되었다고 판단할 수 있다. 그림 15에서 밀 판 진동수에 대한 K 값의 그래프를 보면 주파수가 증가할수록 K 가 감소하는 경향을 보이며, 데이터들이 $y = A/x$ 함수로 피팅 됨을 알 수 있다. 좀 더 확실한 경향성을 보기 위해서는 x 축의 주파수 범위를 좀 더 넓게 볼 필요가 있다.



[그림 15] 표적 입자의 x 축 성분; 밀 판 진동수에 대한 피팅 함수 K 값 그래프

피팅 함수에서 A 에 해당하는 부분은 $N(\frac{m}{2\pi k_B T})^{1/2}$ 으로 분석한 데이터 수 N 과 비례 관계를 가지고 있다. 또한 K 는 N 과 관계가 없으므로 개수와는 상관없이 같아야 한다. 이를 확인하기 위해 그림16처럼 30Hz, 40Hz, 50Hz, 60Hz의 주파수 별로 N 을 다르게 하여 속력 분포를 나타내었다. 표 2는 피팅을 하여 각 값에 따른 A 와 K 값을 정리한 것인데 이를 보면 앞선 예상대로 A 값은 N 값에 비례하여 증가하지만 K 값은 거의 일정함을 알 수 있다.



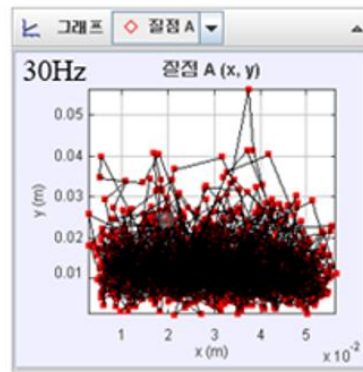
[그림 16] 데이터 수 N 값의 따른 속력 분포 및 피팅 함수 (a) 30Hz, (b) 40Hz, (c) 50Hz, (d) 60Hz

$n(x) = Ae^{-Kx^2}$ Fitting									
주파수 (Hz)	N (개)	A	K	R- <i>squared</i>	주파수 (Hz)	N (개)	A	K	R- <i>squared</i>
30	100	31.78	23.07	0.9890	50	100	24.56	14.75	0.9753
	200	63.00	24.57	0.9756		200	43.75	11.58	0.9822
	300	92.60	23.68	0.9786		300	67.22	12.42	0.9897
	400	128.4	25.27	0.9727		400	90.86	12.82	0.9901
	500	158.5	24.69	0.9828		500	115.1	13.21	0.9925
40	100	28.59	19.75	0.9884	60	100	20.27	9.456	0.9673
	200	54.96	18.95	0.9875		200	39.73	9.507	0.9675
	300	85.27	19.86	0.9812		300	63.72	10.59	0.9873
	400	108.2	17.92	0.9689		400	77.72	8.872	0.9742
	500	133.7	17.79	0.9772		500	100.7	9.861	0.9857

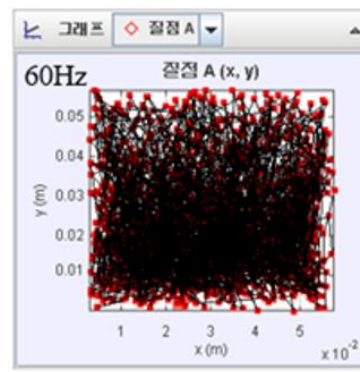
[표 2] 밀 판 진동 주파수와 입자 수에 대한 속력 분포 피팅 함수 값

2. 표적 입자의 y 축 성분에 대한 위치 및 속력 분포

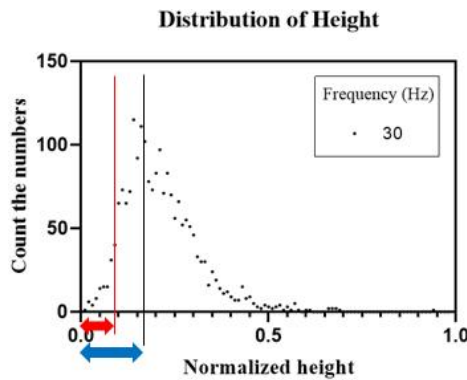
이상 기체 모델의 특성 상 x 축과는 다르게 y 축에는 중력이라는 힘과 진동판에 의한 충격량을 고려해야 한다. y 축 속력 분포 분석에 앞서, 입자의 주파수에 따른 표적 입자의 y 축 위치 분포를 그래프로 분석해 보았다. 그림 17의 (a), (b)는 x 위치에 대한 y 위치에 대한 그래프로 밀 판 진동수가 30Hz일 때와 60Hz일 때 표적 입자가 이동한 경로를 확인 할 수 있다. 이를 정규화 시킨 높이에 대한 입자 수를 그래프로 나타내면 그림 17의 (c), (d)와 같은 분포를 이루고 있다.



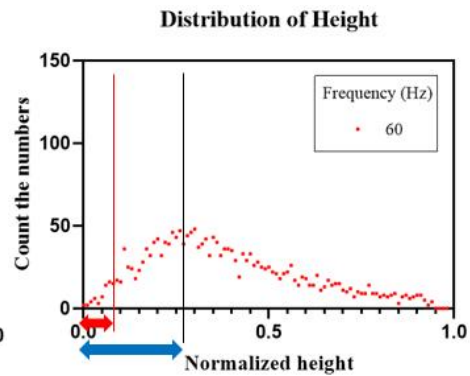
(a)



(b)



(c)



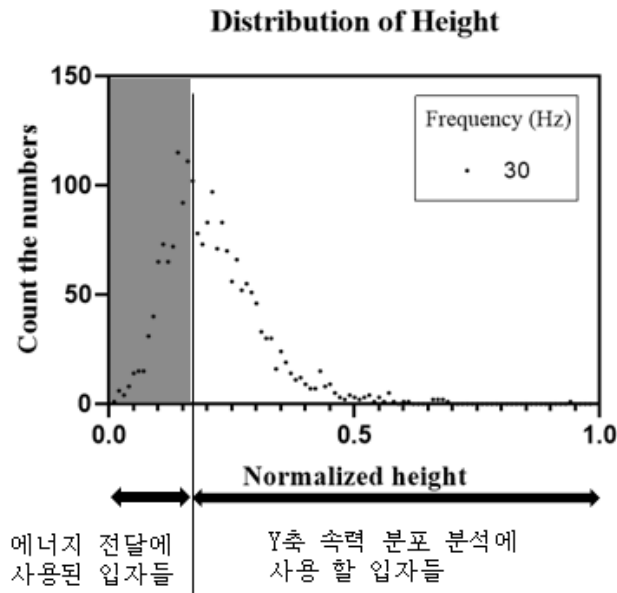
(d)

[그림 17] 표적 입자의 y 축 성분에 대한 위치 분포 (a) 30Hz 일 때 입자의 이동 경로 (b) 60Hz 일 때 입자의 이동 경로 (c) 30Hz 일 때 입자의 위치 분포 (d) 60Hz 일 때 입자의 위치 분포

다시 말해 진동판의 주파수가 높아질수록 분포가 아래쪽으로 내려가고 오른쪽으로 치우쳐진다.

여기서 주의 깊게 봐야할 점은 짧은 화살표 간격 부분과 긴 화살표 간격 부분에 대한 해석이다. 우선 짧은 화살표 간격 부분은 밑 판의 진동 운동 할 때 이동하는 거리를 말한다. 그래프에서 볼 수 있듯이 주파수가 낮을수록 밑 판에 밀집한 입자 데이터가 많음을 알 수 있다.

그 다음은 긴 화살표 간격의 부분이다. 이 부분은 그림 18과 같이 에너지 전달에 사용된 입자들이라고 말할 수 있으며 밑 판의 강제 진동에 의해 위쪽으로 자유 부분의 입자들의 분포를 따른다.

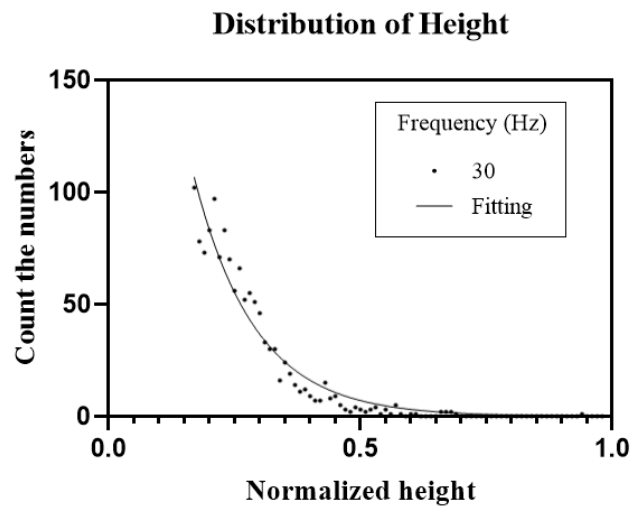


[그림 18] 표적 입자의 y 축 성분에 대한 위치 분포; 구간에 대한 해석

다시 말해 표적 입자의 y 축 성분의 속도 분포를 분석하기 위해서는 에너지 사용된 입자들이 아닌 중력에 영향을 받은 입자만 분석을 해야 한다. 이 부분은 볼츠만 분포의 에너지 구간에 위치 y 에 관한 위치 에너지 항을 대입해 수식을 만든다. 이는

$$n(y)dy = N\left(\frac{mg}{k_B T}\right)e^{-\frac{mg}{k_B T}y} dy$$

와 같이 표현 할 수 있으며 그림 19은 이 수식에 대응되는 $y = Ae^{-Kx}$ 식에 피팅 한 그래프를 나타낸다. 피팅 했을 때 상수 값은 $A = 429.9$, $K = 8.198$, R-squared 값은 0.9508을 따른다.

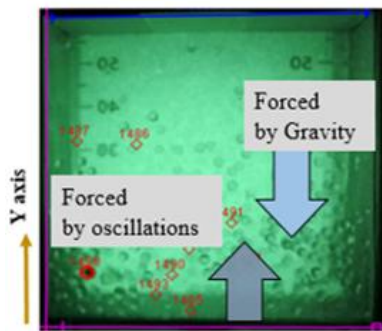


[그림 19] y 축 속력 분포의 사용될 입자들의 위치 분포 및 피팅 함수

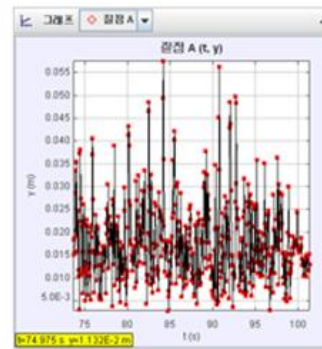
다음은 트래커로 추적한 표적 입자의 y 축 성분에 대한 속력 분석을 하였다. 앞서 말했듯이 위치 분포에서 에너지 전달에 사용된 데이터는 제외한 나머지 데이터로 속력 분포 함수를 나타내었다. 그림 13의 x 축 성분 속력 분포를 얻는 방법과 마찬가지로 그림 20의 1/20초 마다 입자의 위치를 추적하여 충돌 후 y 축 방향으로의 속력 데이터를 얻었다. (d)의

y 축 속력 분포는 x 축과 마찬가지로 $n(v_y) = N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_y^2}$ 식을 따

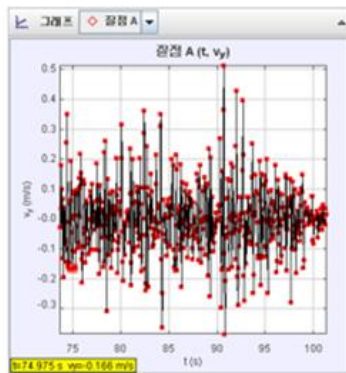
르며 얻은 데이터를 $n(x) = Ae^{-Kx^2}$ 식으로 피팅 하였다. 이 때 $A=131.3$, $K=38.13$ 이며 R-squared 값은 0.9837을 따른다. 또한 그림 21은 주파수 별로 y 축 성분의 속력 분포를 나타내었으며 이에 대한 피팅 값은 표3으로 확인할 수 있다.



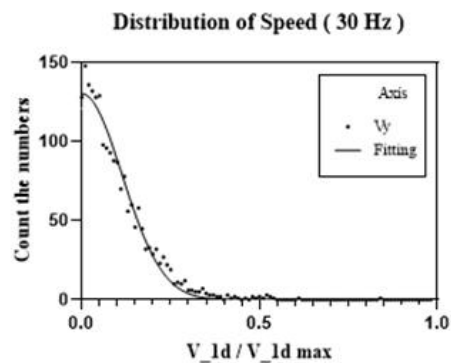
(a)



(b)

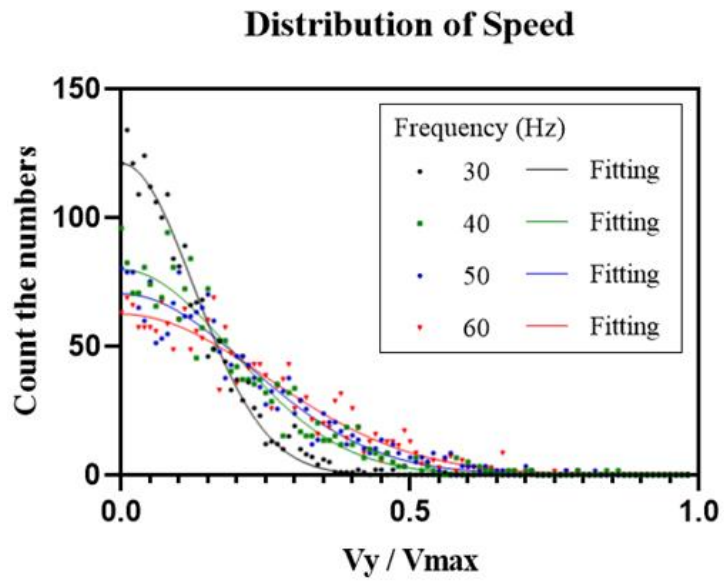


(c)



(d)

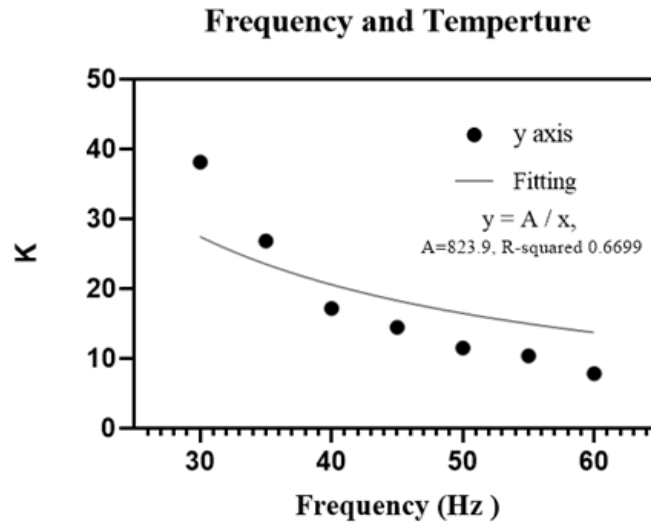
[그림 20] 밀 관 진동 30Hz일 때의 표적 입자의 y 축 성분에 대한 속력 분포 (a) x - y 축 공간에서의 마킹 된 구슬의 추적 (b) 시간에 따른 변위 그래프 (c) 시간에 따른 속력 그래프 (d) 속력 대한 입자의 개수 그래프



[그림 21] 밀 판 진동에 따른 표적 입자의 y 축 성분에 대한 속도 분포 및 피팅 함수

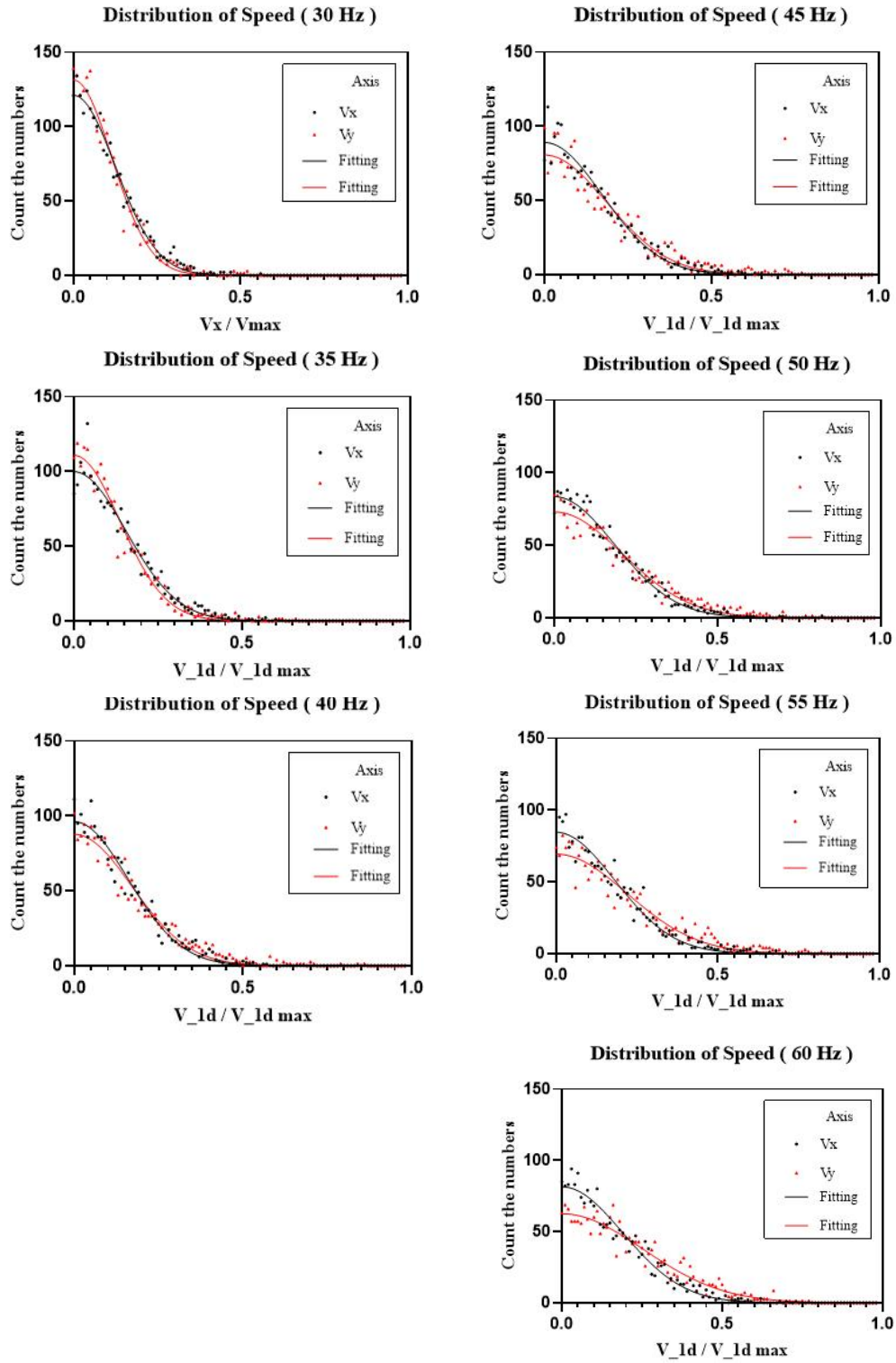
$n(x) = Ae^{-Kx^2}$ Fitting			
Frequency (Hz)	A	K	R-squared
30	131.3	38.13	0.9837
35	110.8	26.86	0.9815
40	87.71	17.19	0.9722
45	80.69	14.49	0.9497
50	73.00	11.51	0.9681
55	69.30	10.41	0.9513
60	62.51	7.866	0.9561

[표 3] 밀 판 진동 주파수에 따른 표적 입자의 y 축 성분에 대한 속도 분포 피팅 함수 값



[그림 22] 표적 입자의 y 축 성분; 밀 판 진동수에 대한 피팅 함수 K 값 그래프

그림 22는 y 축 성분 분포의 밀 판 진동의 주파수에 따른 피팅 할 때의 K 의 그래프를 보여준다. x 축의 성분 분포인 그림 16과 비교 해 보면 보다 피팅 함수 그래프를 덜 따르고 있음을 확인할 수 있다. y 축 성분 분포는 37Hz 기준으로 그 전은 기울기가 가파르며, 그 후는 기울기가 완만하게 그래프의 경향성이 바뀐다. 이를 x 축 성분의 속력 분포 그래프와 직접 비교해 보면 그림 23과 같이 그 차이점을 더 명확히 확인할 수 있다.



[그림 23] 주파수에 따른 x 축, y 축 성분의 속력 분포 비교

지금까지 x 축과 y 축에 정사영 된 속력 분포를 확인해 보았다. 이 둘의 차이점은 크게 중력, 밀 판 진동의 충격량이 라고 볼 수 있다. x 축 성분 속력 분포에는 오직 운동 에너지로 그 분배가 이뤄지는데 y 축에는 에너지에 관여하는 다른 요소가 걸리기 때문이다. 또한 챔버 안의 입자 개수도 영향을 미치는데 그 양이 많을수록 평형 상태가 이뤄지는 시간 전에 강제 진동에 의해 속력 분포 변형에 영향을 줄 수 있다고 해석할 수 있다.

3. 1차원-3차원 데이터 변환

기존 실험에서는 맥스웰-볼츠만 속력 분포의 형태를 확인 할 수 있었다면 트래커로 분석하는 분포에는 정사영의 개념이 들어가기 때문에 한 축에 정사영 시킨 속력의 분포를 확인할 수 있었다. 이 절에서는 트래커를 이용한 모델 분석 방법이 적절한지 확인하기 위해 트래커 처리로 얻은 한 축으로 정사영 된 속력 데이터를 3차원 속도 공간으로 전환한 후의 속력 분포가 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 따르는지 확인하였다.

그림 24에서 볼 수 있듯이 속도 분포를 확인하기 위해서는 속도 공간에서의 입자의 분포를 생각해야 한다. 어떤 입자가 속도를 가지고 있다고 하면 이 속도를 직교 성분 (v_x, v_y, v_z) 으로 나눌 수 있다. 만약 여러 개의 속도를 갖는 입자들을 이 속도 공간에 분포 시키고, 구면 좌표계로 모든 방향으로 적분하여 개수를 세면 그 분포가 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 따르는지 확인할 수 있다.

이처럼 한 축의 정사영 된 속력 분포를 가지고 3차원 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 얻기 위해서는 우선 속도 공간의 분포를 알아야 한다. 하지만 트래커를 통해 얻은 데이터는 정사영이 된 속력 분포이기 때문에 그림 25와 같은 알고리즘을 사용하여 3차원 속도 공간 안의 분포를 알아내었다. 그림 25는 앞면, 옆면, 윗면의 정사영 된 그림을 가지고 3차원의 구조를 알아낼 수 있음을 보여주고 있다. 하지만 본 실험에서는 면이 아닌 한 축에 정사영 된 정보를 가지고 있다. 이 축의 정보는 한 축에서 바라 봤을 때 공간상의 입자 개수를 센 것으로 적분의 개념이 들어간 것으로 반대로 공간상 정보를 얻기 위해서는 미분의 개념으로 풀어낼 수 있다.

한 가지 중요한 점은 트래커를 이용해서 얻은 데이터는 x, y 축에 정사영 된 속력 분포만 알 수 있다는 것이다. 다시 말해 z 축 모두 알아야 속도 공간에서의 속도 분포를 알 수 있는데, 우리는 z 축이 x 축처럼 중력이 작용하지 않는다는 점을 이용하여 z 축 성분 분포와 x 축 성분의 분포가 같다고 가정하였다.

이렇게 세 축에 대한 정보를 가지고 매트랩(MATLAB)프로그램을 이용하여 속도 공간의 속도 분포를 3×3 행렬로 만들었다. 그림 26을 보면 알 수 있듯이 기존 한 축의 분포를

$$y = f_N(v_x)dv_x$$

의 수식으로 나타낼 수 있다. 여기서 f_N 함수는 속력 v_x 에 따른 입자의 개수를 뜻하며 dv_x 는 개수를 세기 위한 속력의 단위 구간을 나타낸다. 같은 방식으로 y 축 분포와 z 축 분포의 값을 엑셀 $N \times 1$ 행렬로 데이터 값을 정리하였다. $f_N(v_x)dv_x$, $f_N(v_y)dv_y$, $f_N(v_z)dv_z$ 의 데이터를 가지고 만든 $f_N(v_x, v_y, v_z)$ 의 3×3 행렬은

$$\begin{aligned} f_N(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z &= N \frac{f_N(v_x)dv_x}{N} \frac{f_N(v_y)dv_y}{N} \frac{f_N(v_z)dv_z}{N} \\ &= \frac{f_N(v_x)f_N(v_y)f_N(v_z)}{N^2} dv_x dv_y dv_z \end{aligned}$$

로 표현할 수 있다. 이렇게 얻은 행렬의 값은 속도 공간에서의 분포를 나타낸다.

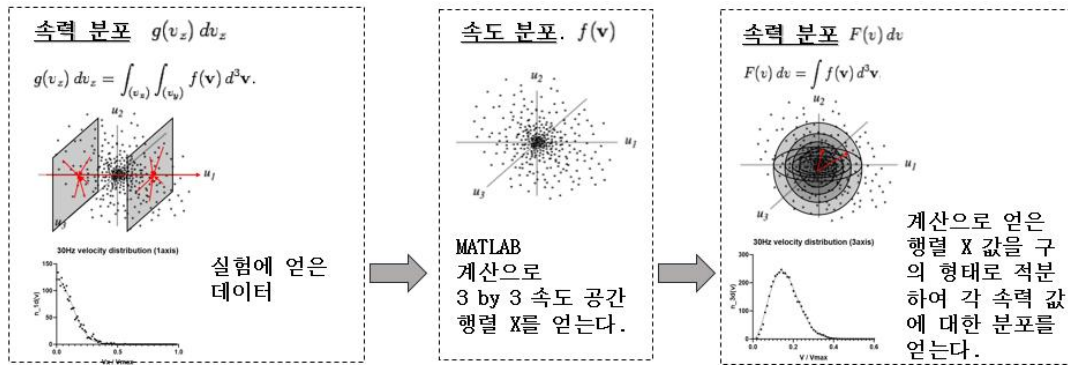
이렇게 얻은 속도 공간 분포는 앞의 배경 이론의

$$n_{vel}(\vec{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} |\vec{v}|^2}$$

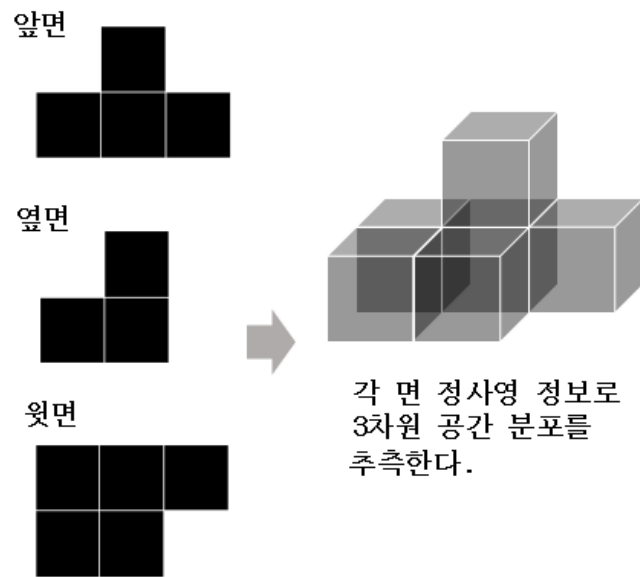
식의 분포와 같음을 알 수 있고 속도 공간 $\vec{v} = (v, \theta, \phi)$ 에서 θ 와 ϕ 에 대해 모든 방향으로 적분을 하게 되면 맥스웰-볼츠만 속력 분포인

$$n(v)dv = 4\pi N v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} dv \text{ 의 } \text{얻을 수 있다. 그림 27은 30Hz}$$

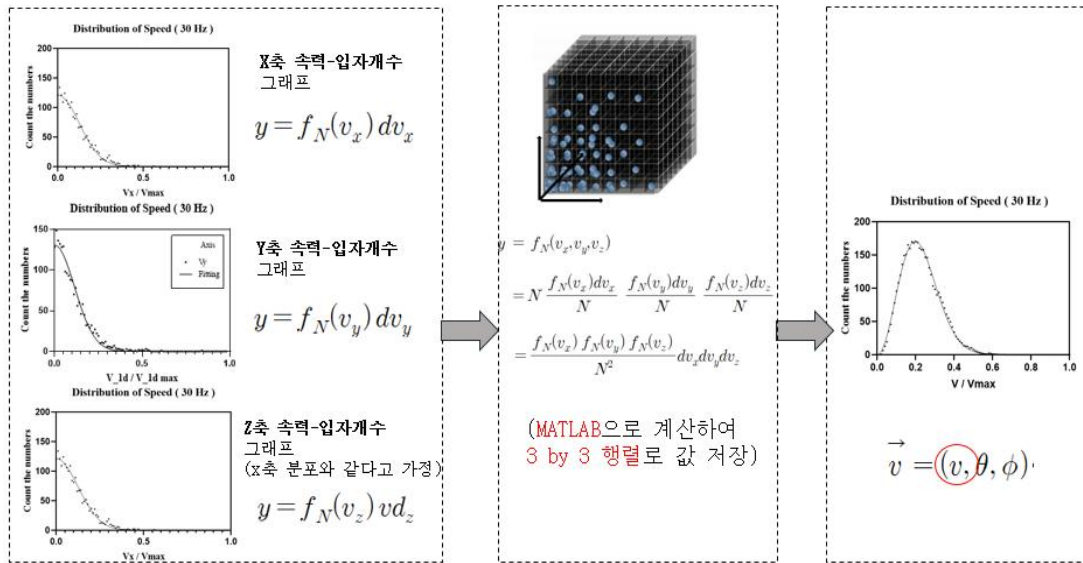
일 때 한 축에 정사영 된 속력 분포를 위와 같은 알고리즘을 통한 3차원 맥스웰-볼츠만 속력 분포로 변환한 결과를 보여주고 있다.



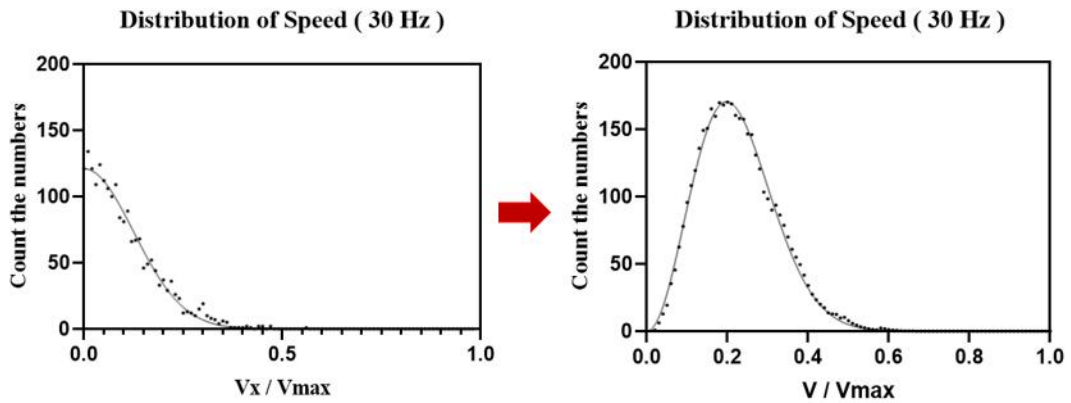
[그림 24] 한 축에 정사영 된 속력 분포를 맥스웰-볼츠만 속력 분포로 변환 시키는 알고리즘



[그림 25] 정사영 정보에서 원래 공간 정보를 얻어내는 방식



[그림 26] 각 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 및 피팅 함수



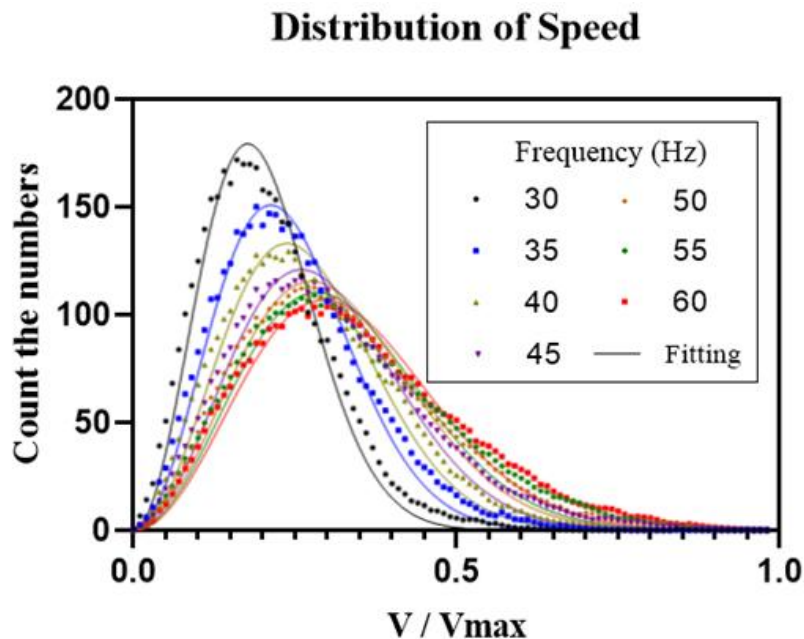
[그림 27] 한 축에 정사영 된 속력 분포의 3차원 분포로의 변환

제 4 절 실험 결과

앞 서 알고리즘으로 한 축에 정사영 된 속력 분포를 맥스웰-볼츠만 속력 분포로 전환하는 방법을 설명하였다. 그림 28은 밀 판의 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 함수를 나타내었다.

$$n(v)dv = 4\pi Nv^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T}v^2} dv \quad \text{식에 대한 피팅 함수 } y = Ax^2e^{-Kx^2} \text{로}$$

피팅 값을 구하였으며 이는 표 4에 정리 하였다. 정규화 시킨 이 후 dv 값은 0.01 단위로 총 100개의 구간에서 입자들의 개수를 확인하였으며 각 주파수 마다 총 개수는 모두 동일하다. 기존 실험과 비교했을 때 더 많은 데이터양으로 확인할 수 있다는 점과 주파수에 따른 그래프 경향성 변화도 더 명확하게 확인할 수 있음을 알 수 있다.



[그림 28] 각 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 및 피팅 함수

$n(x) = Ax^2e^{-Kx^2}$ Fitting			
Frequency (Hz)	A	K	R-squared
30	15540	31.88	0.9847
35	9072	22.12	0.9893
40	6408	17.72	0.9788
45	4859	14.78	0.9796
50	4141	13.18	0.9840
55	3719	12.40	0.9729
60	3331	11.47	0.954

[표 4] 밀 판 진동 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 피팅 함수 값

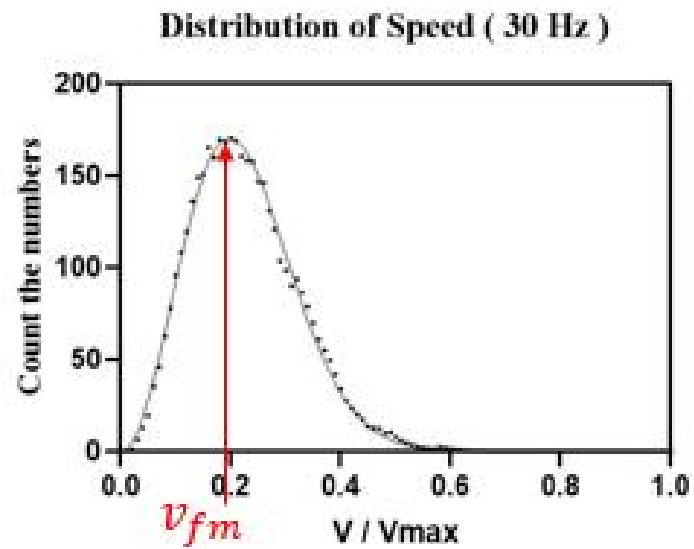
밀 판 주파수가 기존 맥스웰-볼츠만 속력 분포 식에서의 온도와 비례하다는 관계를 파악하기 위해 발견 가능성이 가장 큰 속력 v_{fm} 을 이용해 확인하였다. 온도에 따른 발견 가능성이 가장 큰 속력은

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

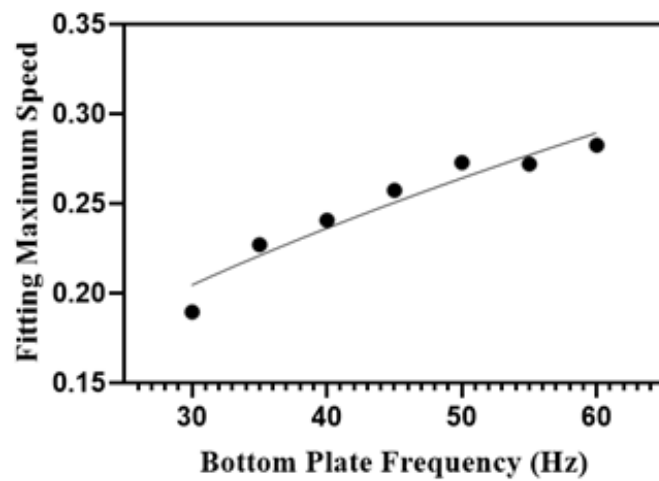
을 따른다. 즉 밀 판 주파수가 온도와 비례하다면

$$v_{fm} \propto \sqrt{\text{frequency of BP}} \quad (\text{BP; Bottom plate})$$

을 만족해야 한다. 그림 29는 30Hz일 때 3차원 맥스웰-속력 분포로 v_{fm} 값을 최고 피크 일 때 속력으로 잡았다. 이런 방식으로 각 주파수 마다 발견 가능성이 가장 큰 속력을 구해 그래프로 그리면 그림 30처럼 나타낼 수 있고, 제공된 형태의 피팅 함수에 분포가 따름을 확인할 수 있었다.

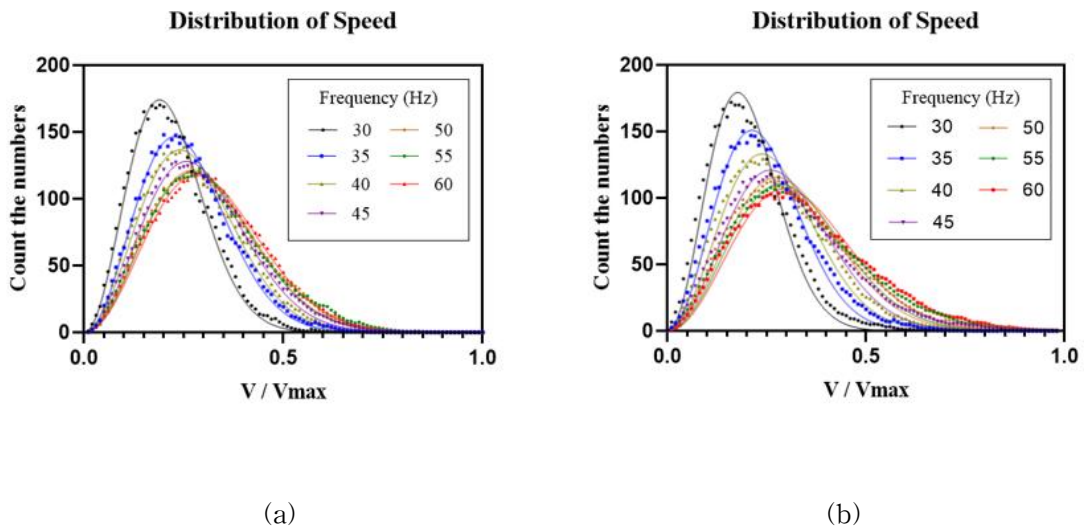


[그림 29] 밑 판의 주파수 30Hz일 때 발견 가능성이 가장 높은 속력 V_{fm}

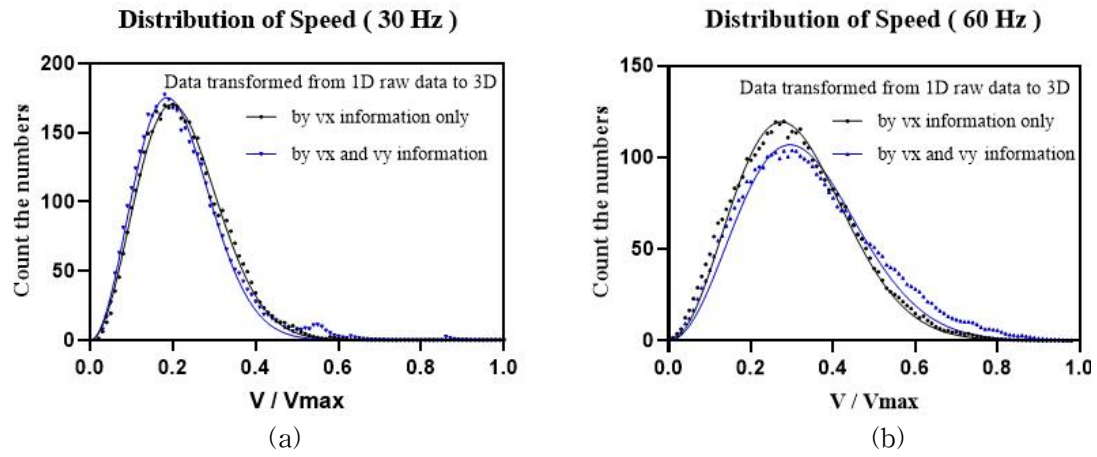


[그림 30] 밑 판의 주파수에 대한 가능성이 가장 높은 속력 V_{fm} 분포

다음으로는 1차원 축에 정사영 된 분포를 3차원 맥스웰-볼츠만 분포로 변환하는 과정에서 중력의 효과 즉, y 축 성분에 정사영 된 속력 분포를 사용할 때와 사용하지 않을 때 차이를 확인하려고 한다. 만약 y 축 성분의 속력 분포가 포함되지 않는다면 무중력 상태에서의 속력 분포로 이상기체 모델링에 가장 근접한 분석이라고 볼 수 있다. 그림31의 (a)를 보면 y 축과 z 축 방향 모두 x 축 성분의 속력 분포와 같다고 가정했을 때의 분포이다. (b)는 y 축에 중력 및 밀 판의 진동에 의한 에너지들이 포함됐을 때의 각 주파수에 따른 속력 분포이다. 언뜻 보기에는 별 차이가 없어 보이지만 그림 32 (a), (b)처럼 특정 주파수에서 비교를 하면 그 차이점을 확연히 볼 수 있다.



[그림 31] 밀 판의 주파수에 따른 맥스웰-볼츠만 속력 분포 (a) 중력의 영향을 받지 않을 때 (b) y 축 방향으로 중력의 영향을 받을 때



[그림 32] 밀 판의 주파수가 30Hz, 60Hz일 때 맥스웰-볼츠만 속력 분포 비교

제 3 장 결론

PHYWE사의 이상기체 모델을 가지고 분석한 이 연구는 입자의 개수를 세어 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 확인하는 기존 실험과 달리 트래커를 사용하여 충돌 입자의 위치 및 속력에 대한 정량 분석을 확인 해 보았다. 트래커는 3차원 공간이 아닌 화면을 분석한다는 특성 때문에 충돌 입자의 시간에 따른 위치 정보를 x 축 성분과 y 축 성분으로 나누어 그 축에 정사영 된 값을 분석하였다. 더불어 1차원으로 정사영 된 정보들을 가지고 3차원으로 변환하여 실제 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 잘 따르는지도 확인할 수 있었다.

한 축에 정사영한 속력 분포에 대한 수식은 충돌 입자의 속도 공간을 직교 좌표계로 보고 다른 두 축에 대해 적분을 하여 얻을 수 있었으며 (Richard 2006) 분석한 값이 그 수식을 잘 따름을 확인할 수 있었다. 또한 온도의 모델링에 해당하는 밀 판의 진동 주파수가 증가함에 따라 수식으로 예상되는 분포도 잘 따랐다. 하지만 분석 과정 중에 충돌 입자의 x 축 성분과 y 축 성분의 속도 분포의 유의미한 차이점을 확인할 수 있었는데 y 축 성분의 분포가 x 축 성분보다 피팅 함수 값에서 벗어난 양상을 보였다. 이에 대한 원인으로는 중력, 밀 판 진동의 충격량, 챔버 안의 입자 수가 많아서 평형을 이루는 시간과 밀 판 진동의 강제 진동 등을 들 수 있다. 이 후 연구로는 이런 변인들을 조작 및 통제하여 충돌 입자의 y 축 성분 속력 분석함으로써 좀 더 복잡한 물리적 환경의 모델링 분석 방향으로 제시 할 수 있다.

또한 충돌 입자의 y 축 성분 분포를 통해 기압에 따른 분포도 확인할 수 있었다. 높이에 대한 충돌 입자의 분포를 그려보면 밀 판 진동에 의해 에너지가 전달되는 부분과 기압에 따른 분포를 동시에 확인 할 수 있는데 기압 부분에 따른 부분을 피팅 함수에 맞추어 보면 주파수, 즉 온도가 증가 할 때 변하는 양상도 잘 따름을 볼 수 있다.

마지막으로 한 축으로 정사영 된 속력 분포 정보를 3차원 공간 안의 속력 분포로 바꾸어 실제 맥스웰-볼츠만 속력 분포를 따르는지도 확인하였

는데 여기서의 핵심은 정사영 된 정보를 어떻게 3차원 공간에서의 정보로 변환 시키는 지에 대한 것이다. 속도 공간 분포는 각 축의 분포 정보를 이용해 그 값의 비율로 균일하게 분배하는 방식으로 얻었다. 특히 각 축의 정사영 정보를 어떤 값을 사용하는지에 따라 무중력 상태이거나 중력이 작용하는 장 안에서의 속도 분포를 결정할 수 있는데 본문에서 밀판 진동수에 따른 그 차이점을 확인해 보았다.

400개의 입자를 가지고 표적 입자를 분석한 이 연구에서는 특히 40Hz에서 50Hz 사이에서 온도와 밀판 진동수의 관계가 가장 선형성을 띠는 것을 볼 수 있었다. 다시 말해 이 구간에서 맥스웰-볼츠만 분포의 원래 수식과 피팅이 최적으로 이뤄지며 발견 가능성이 큰 속도 또한 피팅 함수를 잘 따랐다. 입자의 개수에 따라 충돌 공간 및 시간이 변하고 밀판 진동의 강제 진동 효과가 달라지기 때문에 정량 분석을 위해서는 적절한 변인 통제가 필요함을 알 수 있다.

이 연구를 통해 이상 기체의 미시적 관점의 정량적 분석을 할 때 트래커를 사용하는 모델링 분석 방법이 유용하다는 것을 알 수 있었다. 위에서 다룬 크게 세 가지 측면으로는 한 축에 정사영 된 속도 분포, y 위치에 따른 기압 분포, 3차원으로 변환한 맥스웰-볼츠만 속도 분포인데 이외에도 이상 기체의 새로운 모델을 분석할 때나 다양한 조작 변인을 통한 물리적 현상을 분석할 때 이 트래커 분석 방법이 여러 면에서 유용할 것이라고 기대한다.

V. 참 고 문 헌

- 조혜숙, 남정희. (2017). 과학교육에서 모델과 모델링 관련 국내 교육 연구 동향 분석. 한국과학교육학회지.
- 하지희, 이화중 & 강성주. (2009). 모델링 활동에 대한 과학 고등학교 학생들의 인식. 영재교육연구.
- Abigail R. Daane, Stamatis Vokos & Rachel E.Scherr. (2013). Conserving energy in physics and society: Creating an integrated model of energy and the second law of thermodynamics. AIP conference proceedings 1513, 144
- Huang K. (1987). Statistical mechanics, Wiley
- Hugo H. (2017). Maxwell-Boltzmann distribution: Definition and Properties. Forschem research.
- Jianyong M, Akarsh S, Simon K, & Mark G. (2015) Raizen Testing the Maxwell-Boltzmann distribution using Brownian particles. Optics Express Vol. 23, Issue 2, pp. 1888-1893
- John N, Alfred B. B. (1970) The evolution of the two-dimensional Maxwell-Boltzmann distribution. American Journal of Physics 38, 1402
- Klein, M. J. (1973). The Development of Boltzmann's Statistical Ideas, Acta.
- Lord K, (1892). On a decisive test-case disproving the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of kinetic energy, Proc. R. Soc. London 51, 397-399
- Maxwell, J. C. (1860). Illustrations of the dynamical theory of gases. Part I. On the motions and collisions of perfectly elastic spheres. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 4th Series.
- Müller-Kirsten (2013). Basics of Statistical Physics, 2nd ed, World

Scientific

Ornek, Funda (2008). Models in Science Education: Applications of models in learning and teaching science. International Journal of Environmental and Science Education, v3 n2 p35-45.

Paul A.T., Ralph A.L, (1933). Morden physics

Physica Austriaca, Supplementum 10, 53-106

Richard F. (2006) Thermodynamics & Statistical Mechanics, The University of Texas at Austin.

Robert J. H, Christian B. (2014). Thermodynamics and statistical mechanics an integrated approach. Standard

부 록 A

중력이 작용하지 않을 때 1차원 축으로 정사영 된 속력 분포를 3차원 맥스웰-볼츠만 속력 분포 전환하는 MATLAB 알고리즘

```
1 -   clc;
2 -   clear all;
3 -   vxN = xlsread('30hz','B1:B100');
4 -   Nratiob=vxN/sum(vxN);
5 -   sumNr=sum(Nratiob);
6 -   cnt=size(vxN);
7 -   count=cnt(:,1);
8 -   for i=1:count
9 -       Nratioa(i,1)=Nratiob(i,1)/sumNr;
10 -   end
11
12 -   xyzvN=zeros(count,count,count);
13
14 -   for i=1:count
15 -       for j=1:count
16 -           for k=1:count
17 -               xyzvN(i,j,k)=vxN(i,1)*Nratioa(j,1)*Nratioa(k,1)
18 -           end
19 -       end
20 -   end
21
22 -   vN=zeros(100,1);
23 -   for ln=1:100
24 -       for i=1:count
25 -           for j=1:count
26 -               for k=1:count
27 -                   R=i^2+j^2+k^2;
28 -                   if (R>=(ln)^2) && (R<=(ln+1)^2)
29 -                       vN(ln,1)=xyzvN(i,j,k)+vN(ln,1);
30 -                   else
31 -                       vN(ln,1)=0+vN(ln,1);
32 -                   end
33 -               end
34 -           end
35 -       end
36 -   end
37 -   vN=vN+2;
```

부 록 B

중력이 작용할 때 1차원 축으로 정사영 된 속력 분포를 3차원
맥스웰-볼츠만 속력 분포 전환하는 MATLAB 알고리즘

```
1 -   plc;
2 -   clear all;
3 -   vxN = xlsread('30hz','B1:B100');
4 -   Nratiob=vxN/sum(vxN);
5 -   sumNr=sum(Nratiob);
6 -   cnt=size(vxN);
7 -   count=cnt(:,1);
8 -   for i=1:count
9 -       Nratioa(i,1)=Nratiob(i,1)/sumNr;
10 -   end
11
12 -   vyN = xlsread('30hz','C1:C100');
13 -   Nratioby=vyN/sum(vyN);
14 -   sumNry=sum(Nratioby);
15 -   cnty=size(vyN);
16 -   count=cnty(:,1);
17 -   for i=1:count
18 -       Nratioay(i,1)=Nratioby(i,1)/sumNry;
19 -   end
20
21 -   xyzvN=zeros(count,count,count);
22
23 -   for i=1:count
24 -       for j=1:count
25 -           for k=1:count
26 -               xyzvN(i,j,k)=vxN(i,1)*Nratioa(j,1)*Nratioay(k,1);
27 -           end
28 -       end
29 -   end
```

```

30
31 -   vN=zeros(100,1);
32 -   for ln=1:100
33 -   for i=1:count
34 -   for j=1:count
35 -   for k=1:count
36 -       R=i^2+j^2+k^2;
37 -       if (R>=(ln)^2) && (R<=(ln+1)^2)
38 -       vN(ln,1)=xyzvN(i,j,k)+vN(ln,1);
39 -       else
40 -       vN(ln,1)=0+vN(ln,1);
41 -       end
42 -   end
43 -   end
44 - end
45 - end
46 -   vN=vN+2;

```

Abstract

Maxwell-Boltzmann velocity distribution of collision particles analyzed by Tracker

Jihoon Lee

Dept. of Science of Education

Physics Major

The Graduate School

Seoul National University

In this study, we aim at modeling the microscopic viewpoint of ideal gas and quantitatively analyzing collision particles using analytical method called tracker. The ideal gas model was composed of PHYWE products for modeling. The chamber body is modeled as the ideal gas volume, the glass beads as ideal gas particles, and the vibration frequency of bottom plate as temperature.

To analyze this model, one of the beads is identified as a red target particle, and the position information of the particle over time is obtained through the tracker. However, since the information obtained by the tracker contains the concept of orthogonal, when we obtain a graph of the velocity distribution, it follows an orthogonal velocity

distribution on one axis, not the Maxwell Boltzmann distribution of the three-dimensional space.

After obtaining the data, the orthogonal projected velocity distributions on the x and y axes were analyzed. The difference between the two graphs is due to the gravitational, the forced vibration of bottom frequency, and the number of particles.

The atmospheric pressure distribution to height was also analyzed through density of the collision particles during experiment. The graphs depends on the plate frequency, which can explain the relationship between temperature and gravitational energy.

Finally, the orthographic database obtained from the tracker was reconstructed in 3-D to confirm the Maxwell Boltzmann distribution. In order to know the particle distribution in the velocity space, we need to know the orthogonal information on three axes. Depends on the each set of axis distribution, it can indicate an environment of zero gravity or gravity. We plotted the axis transformation distribution through an algorithm using MATLAB program, and we can confirm that this distribution follows the Maxwell Boltzmann velocity distribution well.

Quantitative analysis and statistical approaches were possible through the tracker data obtained in a short time. In addition to the analysis in the paper, tracker will be useful in experiments on other dependent variables or new ideal gas model analysis.

keywords :

Maxwell-Boltzmann velocity distribution, Position distribution, Dimensional transformation, Orthogonal projection, Tracker
Student Number : 2017-29737